

La résolution de problèmes mathématiques au cycle 2



21 mars 2016, 17h-19h
Inspection d'Ilfurth
David Tournier, conseiller pédagogique

Plan de l'animation pédagogique

2

- **Problématiser**
 - Qu'est-ce qu'un problème mathématique ?
 - Comment les élèves se représentent-ils les tâches associées à la résolution de problèmes ?
- **Contextualiser**
 - L'évolution de la notion de problèmes mathématiques à travers les programmes
 - Le contexte actuel: les programmes 2016, la conférence de consensus et les résultats de l'enquête PISA
- **Catégoriser: une typologie des problèmes additifs**
- **Aborder des éléments de démarche pédagogique**
- **Approfondir la catégorisation des problèmes (les problèmes multiplicatifs)**
- **Rappel: les étapes d'une démarche d'apprentissage**
- **La question des aides: comment focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution**

1

Problématiser

3

- *Pour vous, qu'est-ce qu'un problème?*
- *Dans quelles situations proposez-vous des problèmes à vos élèves?*
- *Quelle place donnez-vous à la résolution de problèmes dans votre classe?*

1

Définir la notion de problème

4

Un problème surgit de l'écart qui se forme entre un état initial et un état but. Résoudre un problème, c'est chercher un ensemble de procédures qui permettent le passage d'un état à un autre.

D'après Newell & Simon, chercheurs en psychologie cognitive, 1972

« Dans une perspective psychologique, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi que le problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. »

Jean Brun (professeur en didactique des mathématiques), « La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives », in *Math École* n° 141, 1990

1

Définir la notion de problème

5

Des problèmes dont la résolution vise la **construction d'une nouvelle connaissance**

problèmes pour apprendre

Des problèmes destinés à permettre le **réinvestissement de connaissances** déjà travaillées, à les exercer

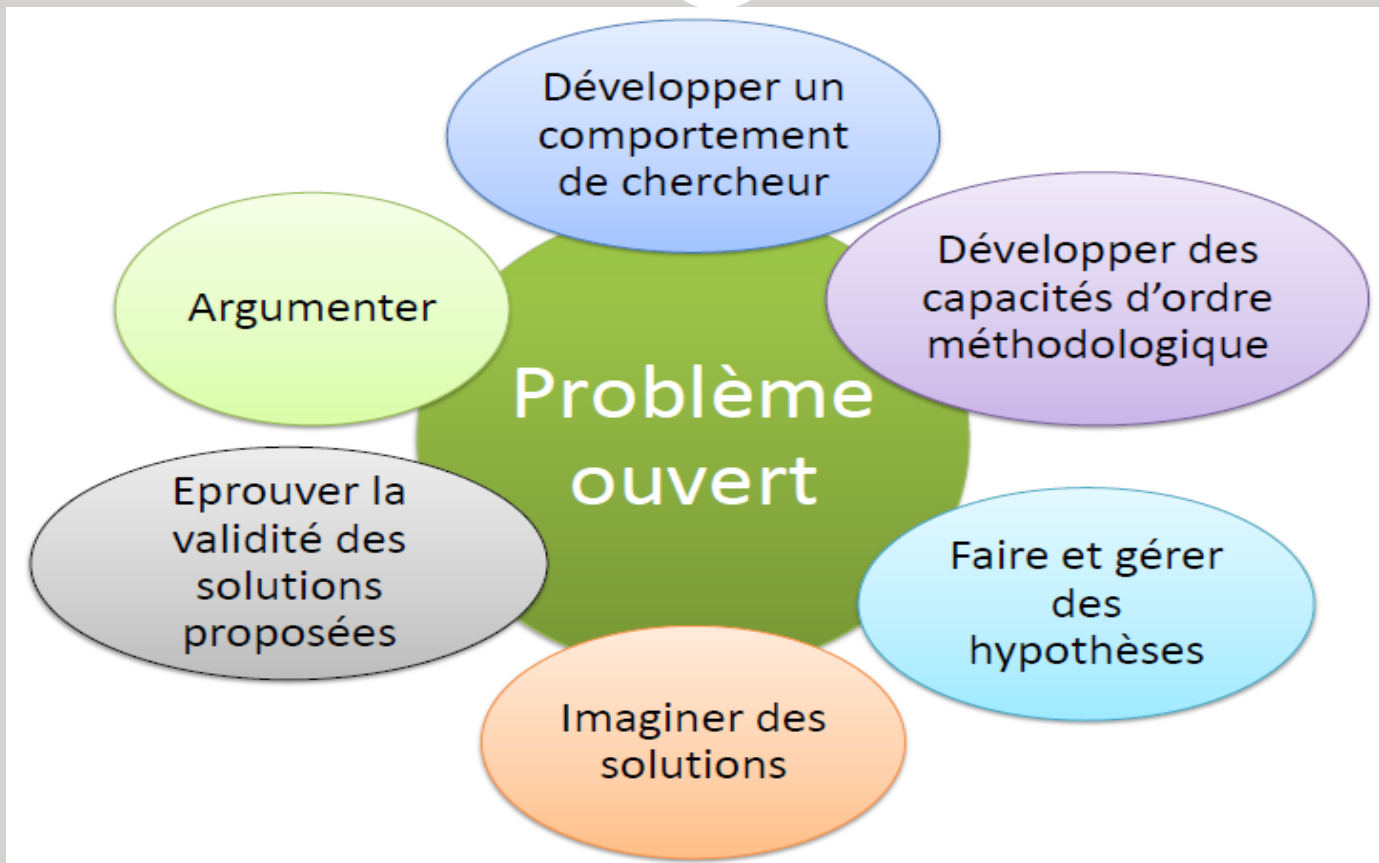
Des problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la **mobilisation de plusieurs catégories de connaissances**

Des problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte

problèmes ouverts

Les problèmes ouverts

6



Source : <http://www.circ-ien-wittelsheim.ac-strasbourg.fr/wp-content/uploads/2015/09/Apprendre-%C3%A0-chercher-par-l%E2%80%99interm%C3%A9diaire-du-Challenge-Math%C3%A9matique.pdf>

1

Des problèmes d'abord ancrés dans le vécu de la classe

7

- Des situations fonctionnelles
 - En rapport avec la réalité de la classe, avec le vécu des élèves
- Des situations pseudo-concrètes
 - « On fait comme si... », « imaginons qu'on voudrait faire... ». Ce sont les situations des manuels scolaires
- Des situations abstraites
 - Elles portent sur les nombres eux-mêmes, elles sont théoriques et se rapprochent de ce que font les mathématiciens.

Sabrina achète un livre a 18 euros
Il lui reste 15 euros
Combien avait – elle avant son achat ?

Qui s'interroge pour savoir combien d'argent on avait avant de réaliser un achat?

2

Le contexte actuel et les nouveaux programmes

8

- **La dernière enquête PISA: une triple spécificité française du point de vue du rapport qu'entretiennent les élèves vis-à-vis des mathématiques:**
 - **Un manque de confiance en soi:** 43% déclarent se sentir perdus face à un problème (moyenne OCDE: 30%)
 - **Un manque de persévérance:** les élèves sont les premiers de l'OCDE pour les non-réponses et un élève sur deux abandonne rapidement face à un problème à résoudre:
 - ✦ Parce qu'ils ne sont pas habitués à rencontrer des problèmes inédits
 - ✦ Parce qu'ils savent que PISA, « ça compte pas pour la moyenne »
 - **L'anxiété face à l'évaluation**
- **« Lorsqu'il est demandé aux élèves une prise d'initiative (essais à faire), la réussite est relativement faible. » (Rapport de la DEPP, avril 2013)**

« Les enseignants proposent régulièrement des séances de résolution de problème. En France, 90% des enseignants déclarent y consacrer des temps spécifiques, de l'ordre d'une à deux séances par semaine ».

Feyfant Annie (2015). *La résolution de problèmes mathématiques au primaire*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 105, novembre. Lyon : ENS de Lyon.

IFÉ Institut Français de l'Éducation

n° 105
Nov. 2015

Sommaire

- Page 1 : Enjeux et objectifs déclarés
- Page 4 : La résolution de problèmes : instrumentation et cognition
- Page 13 : Les pratiques enseignantes et leurs effets
- Page 16 : Bibliographie

LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES AU PRIMAIRE

Les 12 et 13 novembre 2015, le Conseil national de l'évaluation du système scolaire (CNESCO) et l'Institut français de l'éducation (IFÉ) ont organisé une conférence de consensus sur l'apprentissage des nombres et les opérations à l'école primaire. Parmi les questions posées aux experts figure celle-ci : « Quelles relations établit entre la résolution de problèmes et l'introduction des opérations et de leurs propriétés ? ». C'est E. Sander et J.-C. Richard qui ont été chargés de répondre à cette question. En tant que professeurs de psychologie (cognitive), ils ont souligné l'importance des énoncés de problèmes dans le processus de compréhension de notions mathématiques abstraites, et du passage d'une « sémantique quotidienne » à une « sémantique mathématique ». C'est dans ce contexte que s'inscrit ce Dossier de Veille : réaliser une synthèse de travaux sur la résolution de problèmes mathématiques, à destination d'acteurs de l'enseignement primaire.

Après avoir fait les enjeux d'une vision institutionnelle de la résolution de problèmes, cet état de l'art tente une typologie de la notion de « résolution de problèmes » en mathématiques, avant de présenter divers travaux de recherche relatifs à la résolution de problèmes du point de vue opérationnel (techniques opératoires) ou cognitif pour soutenir les processus, stratégies et contextes.

Par Annie Feyfant
Chargée d'étude et de recherche au service Veille et Analyse de l'Institut français de l'Éducation (IFÉ)

ENJEUX ET OBJECTIFS DÉCLARÉS

La compétence à résoudre des problèmes (mathématiques) est souvent citée comme l'une des compétences clés du 20^{ème} siècle. Or, les analyses qui suivent la publication des évaluations PISA valent par exemple de relever, à partir du questionnement des élèves, qu'il existait une corrélation étroite entre moindre performance en mathématiques et manque de confiance des élèves dans leur capacité à résoudre des problèmes de mathématiques, notamment de mathématiques appliquées. Ce niveau de confiance est par ailleurs étroitement lié à la pratique régulière de résolution de problèmes du même type que les items évalués de PISA. Ce qui concerne les problèmes de mathématiques appliquées, la compréhension du problème en lui-même et au contexte dans lequel il s'inscrit (Bergonzi, 2015).

Dossier de veille de l'IFÉ

Dossier de veille de l'IFÉ - n° 105 - Novembre 2015
La résolution de problèmes de mathématiques au primaire

1/20

IFÉ Institut Français de l'Éducation

2

Représentation de la tâche « résolution de problèmes » pour les élèves »

10



Stella Baruk et Rémi Brissiaud

- L'âge du capitaine

97 élèves de CE1 et CE2 ont eu à résoudre le problème suivant:

Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres.
Quel est l'âge du capitaine?

76 ont donné l'âge du capitaine
en utilisant les nombres figurant
dans l'énoncé (78%).

2

Représentation de la tâche « résolution de problèmes » pour les élèves »

11

- **Enoncés « absurdes » (François Boule)**

130 élèves de CE à CM

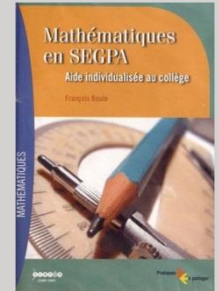
74% des élèves
de CE
calculent.

20% des
élèves de CM
calculent.

J'ai 4 sucettes dans ma poche droite et 9 caramels dans ma poche gauche. Quel est l'âge de mon papa ?

Dans une bergerie, il y a cent vingt-cinq moutons et cinq chiens. Quel est l'âge du berger ?

Il y a 7 rangées de 4 tables dans une classe. Quel est l'âge de la maîtresse ?

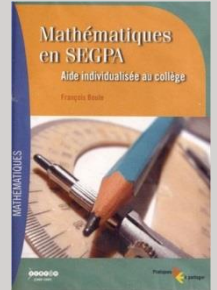


2

Représentation de la tâche « résolution de problèmes » pour les élèves »

12

- Enoncés « absurdes » (François Boule)
130 élèves de CE à CM



- *Les réponses ne sont pas liées à l'immaturité des élèves.*
- *Les réponses fournies ne sont pas arbitraires.*

2

Représentation de la tâche « résolution de problèmes » pour les élèves »

13

Ce que les élèves en disent...

- **Une épreuve redoutée et mal-aimée.**
- **Un texte suivi d'une question à laquelle il faut répondre en cherchant d'abord le calcul à faire avec les nombres de l'énoncé puis en faisant une phrase réponse.**
- **Une énigme, quelque chose qui leur résiste .**

2

Représentation de la tâche « résolution de problèmes » pour les élèves

14

Ce que l'on induit parfois dans l'esprit des élèves...

- Un problème est forcément numérique.
- Un problème a toujours une solution et le maître/la maîtresse la connaît.
- Pour trouver la solution, il faut faire une opération à partir des nombres fournis dans l'énoncé.
- Pour trouver la solution, il n'y a qu'une démarche possible.
- Pour trouver la solution, il faut déjà savoir.
- Pour trouver la solution, il faut trier les informations.

Roland Charnay

- **Au cycle 2, le sens et l'automatisation se construisent simultanément.** La compréhension est indispensable à l'élaboration de savoirs solides que les élèves pourront réinvestir et l'automatisation de certains savoir-faire est le moyen de libérer des ressources cognitives pour qu'ils puissent accéder à des opérations plus élaborées et à la compréhension. Tous les enseignements sont concernés. En mathématiques par exemple, comprendre les différentes opérations est indispensable à l'élaboration de ces savoirs que les élèves réinvestissent. En parallèle, des connaissances immédiatement disponibles (comme les résultats des tables de multiplication) améliorent considérablement les capacités de « calcul intelligent », où les élèves comprennent ce qu'ils font et pourquoi ils le font.

- **Domaine 4: *Les systèmes naturels et les systèmes techniques***
- La pratique du calcul, l'acquisition du sens des opérations et la résolution de problèmes élémentaires en mathématiques permettent l'observation, suscitent des questionnements et la recherche de réponses, donnent du sens aux notions abordées et participent à la compréhension de quelques éléments du monde.

2

Que disent les nouveaux programmes ?

17

Volet 3: les enseignements

- Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) sont étudiées à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures.

Compétences travaillées

Chercher	<p>S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.</p> <p>Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.</p>
Modéliser	<p>Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures.</p> <p>Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.</p>
Raisonner	<p>Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.</p>
Communiquer	<p>Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.</p>

Que disent les nouveaux programmes ?

Les compétences travaillées

Contenus des programmes : Nombres et calculs

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul	
Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
<p>Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée..., conduisant à utiliser les quatre opérations.</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Sens des opérations. ➤ Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction). ➤ Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division). <p>Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques.</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Sens des symboles $+$, $-$, \times, $:$. 	<p>Étudier les liens, entre :</p> <ul style="list-style-type: none"> - addition et soustraction - multiplication et division. <p>Distinguer les problèmes relevant des structures additives des problèmes relevant de structures multiplicatives.</p>
<p>Organisation et gestion de données</p> <p>Exploiter des données numériques pour répondre à des questions. Présenter et organiser des mesures sous forme de tableaux.</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Modes de représentation de données numériques : tableaux, graphiques simples, etc. 	<p>Ce travail est mené en lien avec « Grandeurs et mesures » et « Questionner le monde ».</p>

2

Que dit le document d'accompagnement *Le nombre au cycle 2?*

20



- CP-CE1:
 - Conduire les élèves à **résoudre des problèmes**, essentiellement additifs et multiplicatifs, « problèmes simples à une opération »
 - les amener à **automatiser le processus de reconnaissance de l'opération.**

- Des points d'attention:
 - la compréhension de l'énoncé (y compris le jeu symbolique, scolaire, qui consiste à s'emparer d'un problème);
 - la diversité des formes de présentation (variété des habillages) ;
 - la progressivité de l'élaboration de procédures plus efficaces et de l'automatisation des procédures utilisées.

2

Que dit le document d'accompagnement *Le nombre au cycle 2?*

21

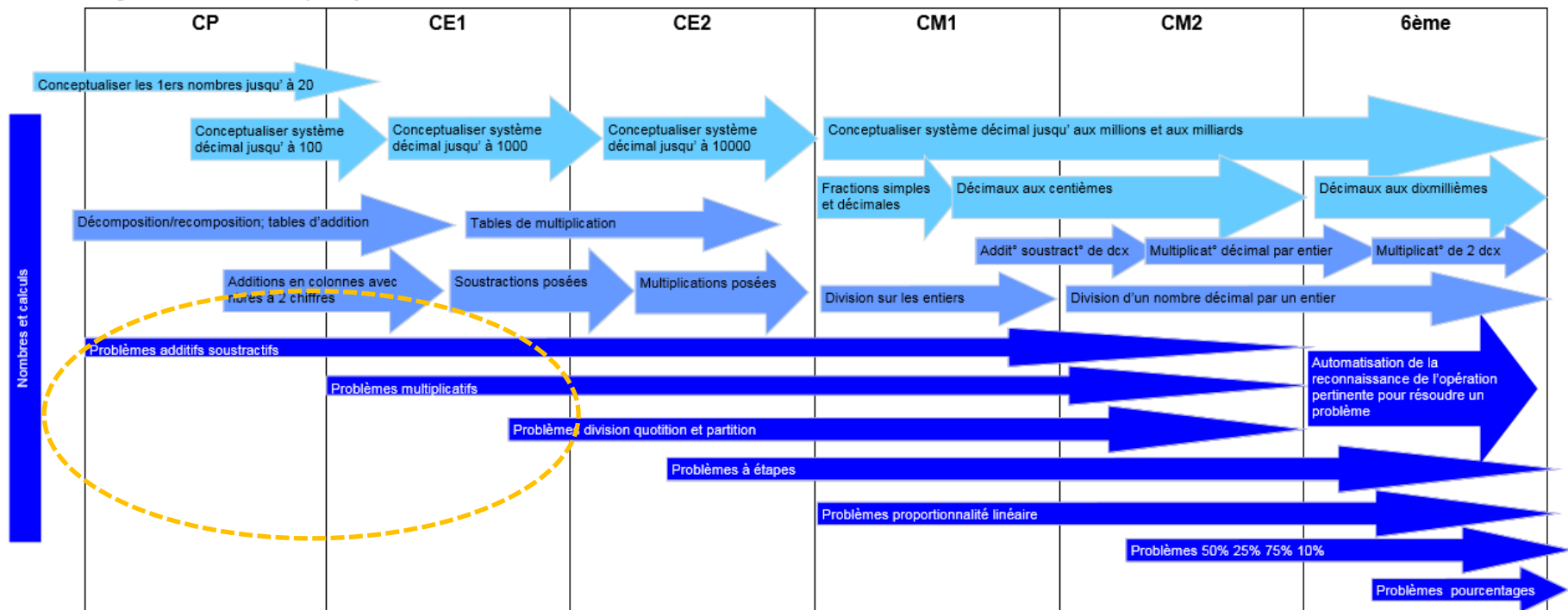


- A l'entrée au CP : présenter des problèmes par des «situations» proches de la vie courante de l'élève (des pratiques où le rapport à l'objet et les manipulations sont directs).
- Progressivement, quand l'écrit sera installé: faire comprendre que l'énoncé écrit d'un problème n'est souvent que l'habillage particulier d'une histoire que les élèves, ou d'autres personnes, auraient pu vivre.

Passage de situations réellement vécues à des problèmes évoqués, et qu'il faut mentalement se représenter

- Se dégager progressivement des manipulations, amener l'élève à dépasser le simple stade de l'action pour s'engager dans un processus de conceptualisation.

Programmation mathématiques cycles 2 & 3



Source: circonscription d'Angoulême préélémentaire

3

Typologie des problèmes additifs (classification de Gérard Vergnaud)

23

Les problèmes additifs

Les problèmes multiplicatifs

3

Typologie des problèmes additifs (classification de Gérard Vergnaud)

24

Les problèmes additifs

- **Les problèmes additifs sont des problèmes ternaires. Ils mettent en jeu une addition ou une soustraction.**
- **Connaître la typologie de problèmes fournit une clé de lecture des énoncés et invite à proposer des situations les plus variées possibles.**

3

Typologie des problèmes additifs (classification de Gérard Vergnaud)

25

Les problèmes additifs

- **Mise en situation:**
Proposez une classification de ces énoncés.

3

Typologie des problèmes additifs (classification de Gérard Vergnaud)

26

Les problèmes additifs

LES DIFFERENTES CATEGORIES DE PROBLEMES ADDITIFS ET SOUSTRUCTIFS AU CYCLE 2

D'APRES LA TYPOLOGIE DES STRUCTURES ADDITIVES DE GERARD VERGNAUD

		CATEGORIES	EXEMPLES	FORMULATIONS UTILISABLES		
TRANSFORMATION D'ETAT	1	Recherche de l'état final connaissant la transformation positive et l'état initial.	$\boxed{t+}$ $e_i \rightarrow E_f$	« Léo avait 3 billes. Puis Juliette lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant Léo ? »		On cherche la quantité après l'action.
	2	Recherche de l'état final connaissant la transformation négative et l'état initial.	$\boxed{t-}$ $e_i \rightarrow E_f$	« Léo avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Juliette. Combien de billes a maintenant Léo ? »		
	3	Recherche de l'état initial connaissant la transformation positive et l'état final.	$\boxed{t+}$ $E_i \rightarrow e_f$	« Léo avait des billes. Puis Juliette lui a donné 5 billes. Maintenant Léo a 9 billes. Combien de billes avait Léo ? »	C'est un problème avec une action.	On cherche la quantité avant l'action.
	4	Recherche de l'état initial connaissant la transformation négative et l'état final.	$\boxed{t-}$ $E_i \rightarrow e_f$	« Léo avait des billes. Puis il en a donné 5 à Juliette. Maintenant Léo a 3 billes. Combien avait-il de billes ? »		
	5	Recherche de la transformation positive	$\boxed{T+}$	« Léo avait 3 billes. Puis Juliette lui a donné des billes. Léo a maintenant 9 billes. Combien de billes a-t-elle données ? »		

3

Typologie des problèmes additifs (classification de Gérard Vergnaud)

27



Elaborer de traces des procédures utilisées pour chaque type de problème

- D'un point de vue plus « strictement mathématique », dans leur variété, **les situations additives ne présentent pas une égale difficulté selon la catégorie à laquelle elles appartiennent**. Il est nécessaire d'en tenir compte lors de l'élaboration d'une progression.
- **L'écriture collective d'affiches de référence** menée avec la classe participe à la construction de la notion et à la structuration des connaissances. Pour les élaborer, le support de l'affiche (avec l'énoncé du problème choisi pour représenter le type de problèmes auquel sera associée la procédure de résolution retenue) permet de composer un exemple générique auquel seront apparentés les énoncés de la même catégorie de problèmes rencontrés lors des séances d'entraînement, de réinvestissement ou d'évaluation.

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

Les problèmes additifs

« un apprentissage à la résolution de problèmes, passant par l'écriture d'énoncés sous contraintes et par l'analyse, permet aux élèves de mieux lire et résoudre les problèmes et de développer des apprentissages ciblés sur la langue française. »

Annie Camenisch et Serge Petit

APMEP, janvier - février 2005, pp. 7-15

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

Les problèmes additifs

Un exemple de pratique

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

Une séquence composée de 4 séances visant à :

- 1. Opérer un classement d'énoncés et le justifier.**
- 2. Retrouver l'histoire et rédiger une histoire à partir d'un énoncé.**
- 3. Passer d'une histoire à des énoncés.**
- 4. Produire de manière systématique des énoncés de problèmes.**

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

30

Les problèmes additifs

1. Avant la récréation, Arthur avait 17 billes. Pendant la récréation, il joue et perd 5 billes.

Combien a-t-il de billes après la récréation ?

2. Lundi soir, la température dans la cour de l'école était de 17 degrés. Pendant la nuit, elle a baissé de 5 degrés.

Quelle température fait-il le mardi matin ?

3. À l'arrêt « Mairie », 5 personnes descendent d'un bus. Après l'arrêt, le même bus transporte 12 personnes.

Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

4. Lundi soir, la température dans la cour de l'école était de 17 degrés. Mardi matin, elle est de 12 degrés.

Que s'est-il passé pendant la nuit ?

5. Arthur, qui avait inventé un jeu, joue une première partie. Il perd 5 billes. Il joue ensuite une deuxième partie. Il gagne 12 billes.

Après ces deux parties, Arthur a-t-il plus ou moins de billes qu'avant ces deux parties ? Combien de plus ou combien de moins ?

6. **Que s'est-il passé pendant la récréation ?**

Avant la récréation, Arthur avait 17 billes. Il joue. Après la récréation il a 12 billes.

7. Avant de s'arrêter à l'arrêt « Mairie », un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt « Mairie », le bus transporte 12 personnes.

Que s'est-il passé à l'arrêt ?

8. Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés.

Quelle était la température lundi soir ?

9. Avant de s'arrêter à l'arrêt « Mairie », un autobus transportait 17 personnes. Pendant l'arrêt, 5 personnes sont descendues.

Combien de personnes le bus transporte-t-il après l'arrêt ?

10. Un bus s'arrête à un premier arrêt, 5 personnes descendent. Il s'arrête ensuite à un deuxième arrêt où 12 personnes montent.

Après ces deux arrêts, y-a-t-il plus ou moins de personnes dans le bus ? Combien de plus ? Combien de moins ?

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

31

Les problèmes additifs

La première séance se scindait en deux étapes :

- résoudre les situations additives;
- classer les dix énoncés en justifiant le classement réalisé par des critères précis.

Les critères de classement attendus étaient :

- selon la variable en jeu (bus, température, billes) ;
- selon que l'énoncé comporte ou non un verbe inducteur d'opération à effectuer ;
- selon la place de la question ;
- selon la valeur numérique du résultat ;
- selon ce qui est recherché (la question porte sur l'état initial, sur la transformation, sur l'état final ou sur la description complète de la transformation « *Que s'est-il passé ?* ».)

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

32

Les problèmes additifs

Les classements produits par les élèves:

	Nombre d'élèves	Nombre de groupes
➤ Selon la même variable.	6	2
➤ Selon l'opération utilisée.	4	1
➤ Selon ce qui est recherché.	2	1
➤ Selon la valeur numérique du résultat.	1	
➤ Selon les valeurs numériques des éléments donnés.	1	
➤ Selon que l'énoncé comporte un mot inducteur d'opération « trompeurs ».	1	1

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

33

Les problèmes additifs

Pour **la deuxième séance**, l'enseignante retient trois énoncés parmi les dix donnés lors de la séance précédente.

Objectif : imaginer l'histoire qui a permis d'écrire cet énoncé en respectant les contraintes suivantes :

- respecter l'ordre chronologiques des événements ;
- donner sa valeur à la donnée manquante ;
- écrire l'histoire en trois phrases

Inviter les élèves à écrire sous contraintes l'histoire sous-jacente à un énoncé, leur a donc permis de prendre conscience que **plusieurs énoncés différents relèvent d'une même histoire** et d'entrer ainsi dans une lecture analytique « active » des énoncés.

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

34

Les problèmes additifs

Dans **la troisième séance**, l'élève devait acquérir la compétence « *A partir d'une histoire, écrire plusieurs énoncés en respectant des contraintes.* »

Tableau comparatif entre « histoire » et « énoncé ».

	Histoire	Enoncé
Ordre des événements	chronologique	quelconque
Informations	toutes présentes	une manquante
Types de phrases	déclaratives	une <u>au moins</u> interrogative

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

35

Les problèmes additifs

Pour fabriquer un énoncé à partir d'une histoire, il fallait :

- **modifier ou non l'ordre des événements ;**
- **choisir une donnée à supprimer (l'état initial ou final ou la transformation) ;**
- **demander de trouver la donnée manquante à l'aide d'une question.**

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

36

Les problèmes additifs

Trois périodes sont donc présentes dans un énoncé de ce type : une période précédant la transformation, la période de la transformation et la période suivant la transformation.

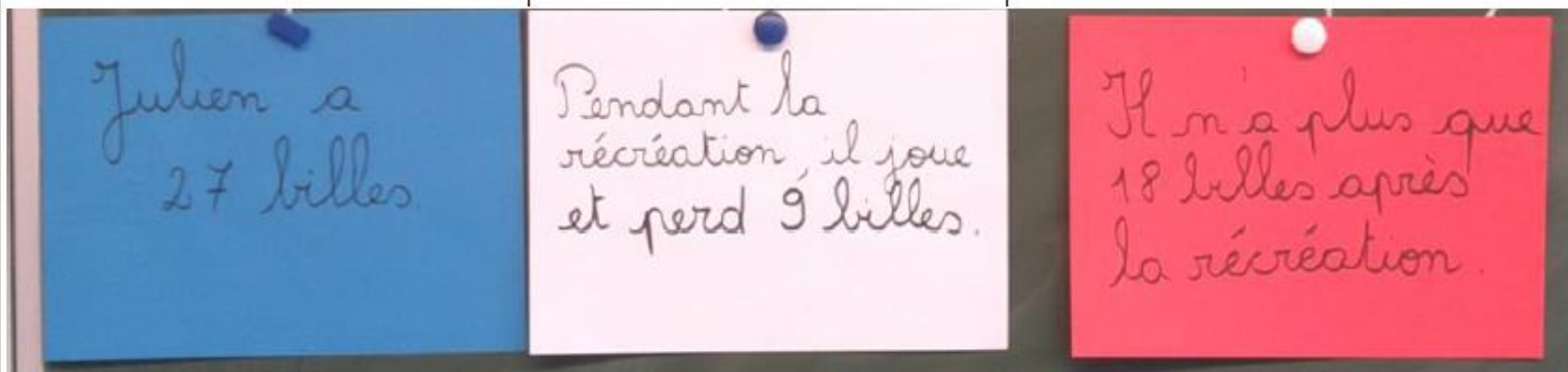
A partir de l'histoire suivante, les élèves vont devoir produire un énoncé de problème

« Julien a 27 billes. Pendant la récréation, il joue et perd 9 billes. Il n'a plus que 18 billes après la récréation ».

état initial

transformation

état final



Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

Aborder des éléments de démarche pédagogique

37

Les problèmes additifs



Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

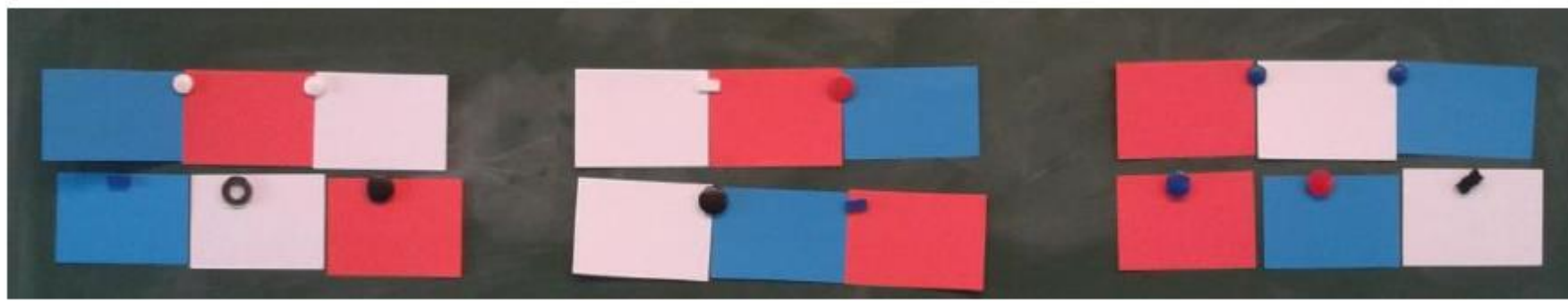
Aborder des éléments de démarche pédagogique

38

Les problèmes additifs

Au début de **la quatrième séance**, recherche de tous les types d'énoncés qu'il est possible d'écrire.

Les six drapeaux suivants sont identifiés.



Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

4

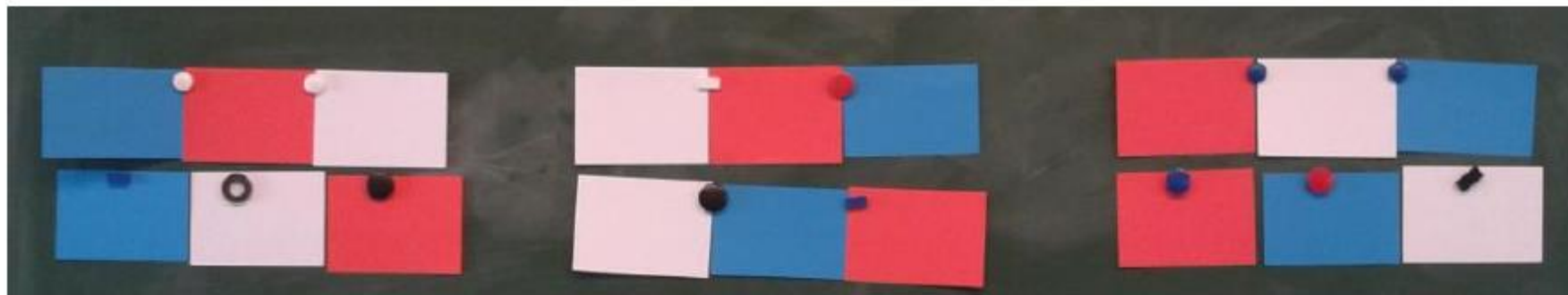
Aborder des éléments de démarche pédagogique

39

Les problèmes additifs

Transposition:

« Samedi soir, papy a 27 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit. Dimanche matin papy a 35 lapins. »



Ce projet d'écriture a permis aux élèves de prendre conscience de la manière dont sont fabriqués certains énoncés de problèmes.

Classe de Mme Rudloff-Beyer, école de Dessenheim, 2014-2015

5

Approfondir la catégorisation des problèmes

40

Les problèmes multiplicatifs

5

Approfondir la catégorisation des problèmes

41

Les problèmes multiplicatifs

LES DIFFERENTES CATEGORIES DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS AU CYCLE 2

D'APRES LA TYPOLOGIE DES STRUCTURES MULTIPLICATIVES DE GERARD VERGNAUD

Les situations proposées dans un contexte de distribution, de partage et de groupement relèvent de problèmes de multiplication et de division.

		CATEGORIES	EXEMPLES	FORMULATIONS UTILISABLES
PROBLEMES DE MULTIPLICATION	Problèmes ternaires	Configuration rectangulaire Ces problèmes mettent en jeu un produit de mesures et sont scolairement identifiés comme supports à la construction du concept de multiplication.	<i>Quel est le nombre de carreaux de chocolat que contient une tablette de 3 sur 4 ?</i>	$C'est \underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{4 \text{ fois}}$ $C'est aussi \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ fois}}$
		Multiplication Ces problèmes relèvent de l'addition réitérée. On cherche le nombre total d'éléments.	<i>L'enseignant distribue quatre stylos à chaque élève. Il y a huit élèves. Combien a-t-il distribué de stylos en tout ?</i>	<i>C'est 4 (stylos) que je répète 8 fois.</i>
	Division quotient			

6

Réactiver ses connaissances Les étapes d'une démarche d'apprentissage

42

1. Présentation du problème
2. Découverte.
3. Temps de recherche individuel
4. Confrontation avec le groupe.
5. Mise en commun, débat et validation.
6. Institutionnalisation.

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

43

- Pour résoudre un problème il faut...

Faire d'abord une évocation pour **situer le contexte**

Faire ensuite une **évocation des relations** en vue de leur traduction **mathématiques** (phase d'abstraction)

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

44

- En s'appuyant sur des situations concrètes

Un exemple de situation d'apprentissage : le jeu des enveloppes

Pour cette étape, il s'agit bien d'une situation et non pas d'un énoncé.

Les élèves disposent d'enveloppes contenant un nombre de jetons inconnu d'eux. Le maître leur fait ajouter des jetons. Les élèves comptent alors tous les jetons dans leur enveloppe.

Ils doivent trouver le nombre initial de jetons dans leur enveloppe, sans contrainte de procédure, puis dans un second temps, en utilisant une écriture soustractive. Par la suite, il leur est demandé de vérifier avec le matériel.

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

45

- En travaillant spécifiquement la lecture d'énoncés :

Difficultés potentielles

- L'ordre de présentation des informations
- Le contexte
- Le vocabulaire
- Les redondances
- La présence d'informations implicites
- La place de la question...
- L'utilisation des termes relationnels comme *moins que*, *plus que*, *de plus*...

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

46

- En travaillant spécifiquement la lecture d'énoncés :

Activités possibles

- compléter des énoncés lacunaires
 - ✦ pour éviter qu'un élève ne refuse que Juliette puisse donner des pommes car « elle n'en a pas » dans l'exemple « Léo a 3 pommes. Juliette lui en donne 5 de plus »
- remettre les événements dans l'ordre de leur survenue en précisant les états initiaux, les étapes... en racontant une histoire.
- assembler des puzzles d'énoncés

Aides possibles :

- Aborder d'abord l'énoncé du problème sans la question
- Mettre la question au début
- Proposer la question après la vérification collective de la compréhension de l'énoncé

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

47

- En aidant à la compréhension de l'énoncé :

Activités possibles : demander aux élèves de:

- reformuler oralement la situation ; raconter l'énoncé (verbaliser avec ses propres mots)
- représenter la situation de façon figurative (dessin, image, photo) ou symbolique (schéma) ;
- mimer la situation avec ou sans matériel ; mettre en scène, jouer
- expliquer les mots des questions, interroger les mots inducteurs
- repérer ce que l'on sait et ce que l'on cherche

Aides possibles:

- Etayer la représentation de la situation : par le recours aux images mentales, par la manipulation, par la scénarisation (se faire le film)
- Clarifier le contexte et les références culturelles supports de l'énoncé (découverte du monde, vie courante : le sens et l'expérience des contextes de la vie d'enfant) ;

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

- En aidant à la compréhension de l'énoncé :
 - Aborder les difficultés lexicales
 - Traiter en situation la question du vocabulaire mathématique parfois contre-intuitif

✦ Les mots inducteurs ...

et leur possible ambiguïté

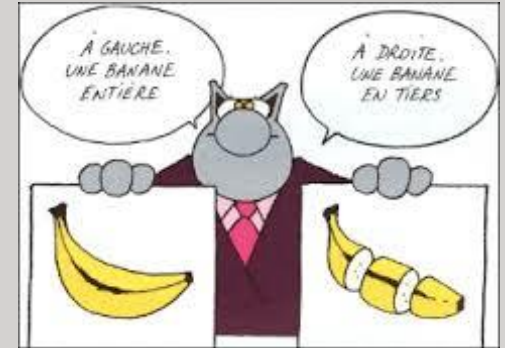
+	-	x	:
Et	Différence	Chaque	Partager
Plus	Reste	Chacun	Distribuer
Ajouter	Moins		Couper
Gagner	Retirer		Répartir
	Enlever		
	Prendre		
	Perdre		
	Rester		

« Auguste a 13 ans. Il a 4 ans de moins que Romain. **Quel âge à Romain ?** »

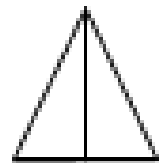
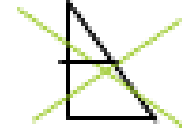
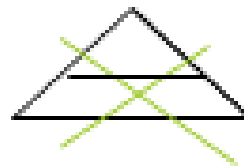
- L'élève repère le « moins »
- Il calcule : $13 - 4 = 9$
- « Romain a 9 ans. »

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

- En aidant à la compréhension de l'énoncé :
 - Aborder les difficultés lexicales
 - Traiter en situation la question du vocabulaire mathématique parfois contre-intuitif
 - ✦ la polysémie des termes mathématiques (ex : sommet)



« Trace un triangle avec l'un des côtés en couleur. Puis trace un segment qui joint le milieu du côté colorié au sommet opposé. »
(évaluation de début de 6^e)



7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

50

- En évitant la surcharge cognitive :
 - S'appuyer sur des outils permettant aux élèves de décharger leur mémoire de travail (tableau de numération, table d'addition, doubles et moitiés...) afin de recentrer leur activité cognitive sur la résolution de problème proprement dite

7

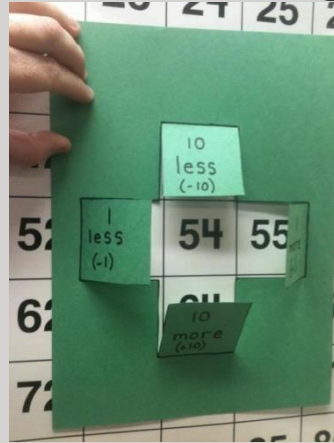
Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

51

- En évitant la surcharge cognitive :

Tableau des nombres

\rightarrow + 1	\leftarrow - 1	\downarrow + 10	\uparrow - 10						
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99



+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Doubles et Moitiés

Le double de 6, c'est 12.

Le double, c'est deux fois plus.

La moitié de 6, c'est 3.

La moitié, c'est deux fois moins.

Le double de 1, c'est

Le double de 2, c'est

Le double de 3, c'est

Le double de 4, c'est

Le double de 5, c'est

Le double de 6, c'est

Le double de 7, c'est

Le double de 8, c'est

Le double de 9, c'est

Le double de 10, c'est

La moitié de 2, c'est

La moitié de 4, c'est

La moitié de 6, c'est

La moitié de 8, c'est

La moitié de 10, c'est

La moitié de 12, c'est

La moitié de 14, c'est

La moitié de 16, c'est

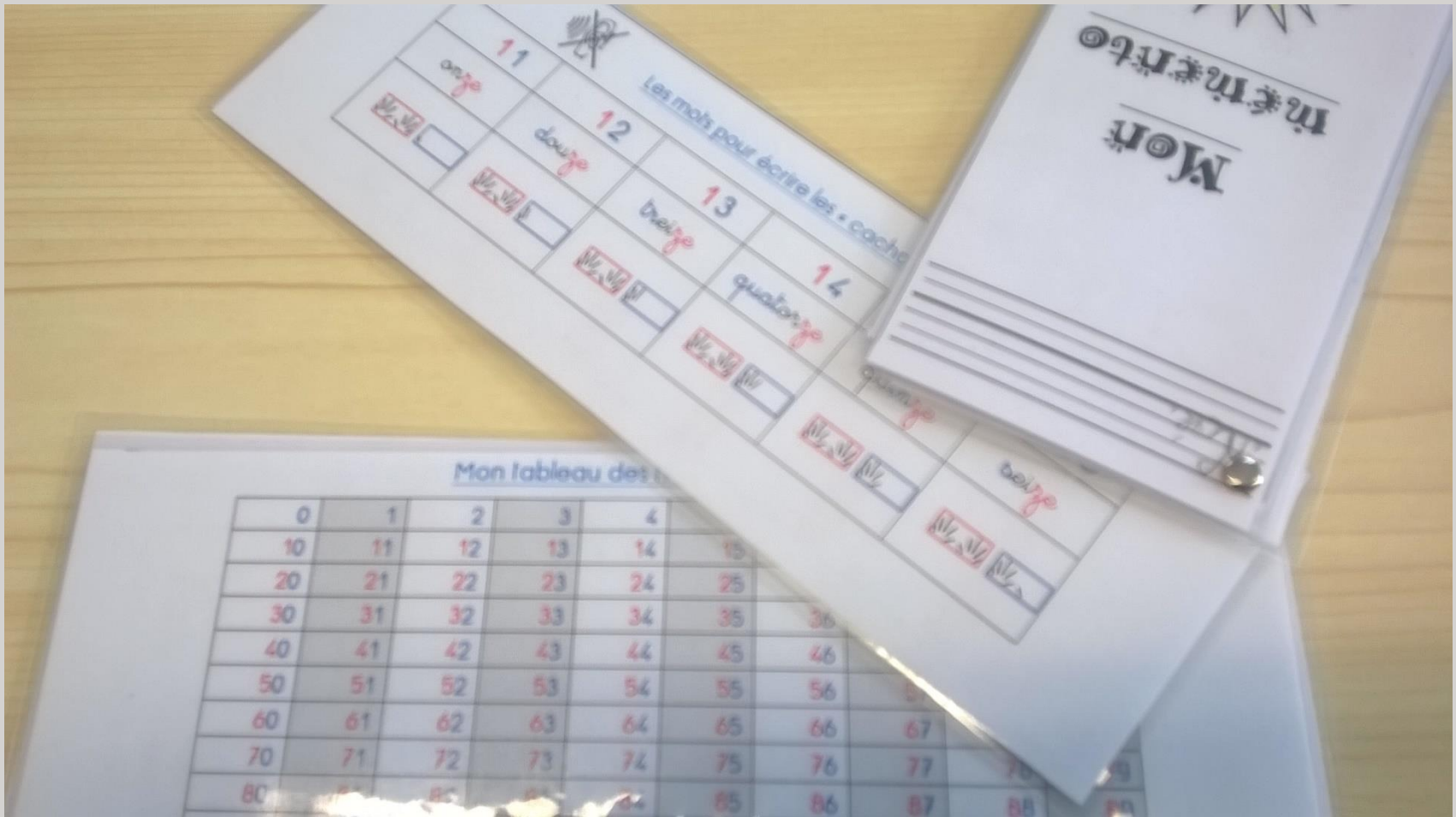
La moitié de 18, c'est

La moitié de 20, c'est

7

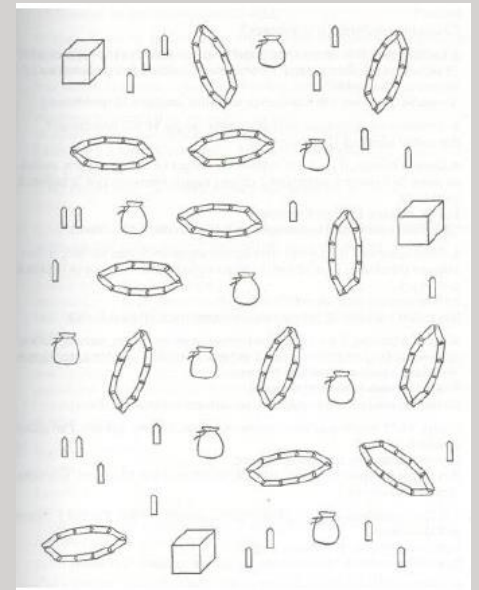
Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

52



Classe de CP de Mme Luttringer, RPI Balschwiller

- En diversifiant la présentation des énoncés
 - Le recours systématique à des énoncés écrits place beaucoup d'élèves en difficulté pour des raisons qui touchent prioritairement à leur fragilité en lecture.
 - Varier les types de problèmes : à partir
 - ✦ de données réelles ;
 - ✦ de données représentées ;
 - ✦ d'énoncés où ne figurent que les données utiles ;
 - ✦ d'énoncés plus compliqués.



Combien de trombones?

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

54

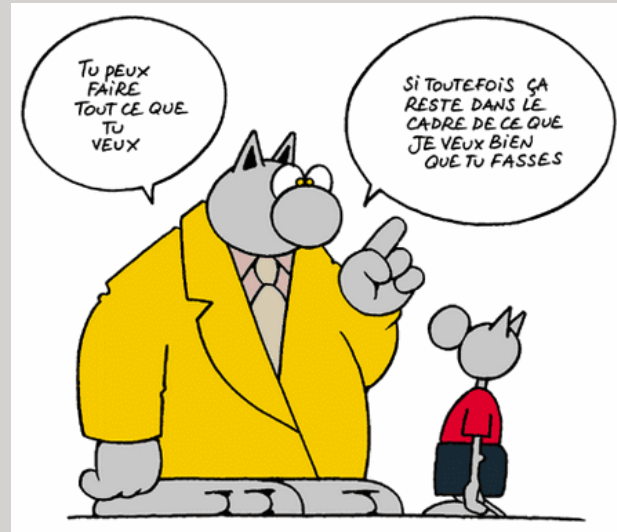
- En clarifiant le contrat didactique
 - Des difficultés inhérentes aux projections que se construisent les élèves quant aux attentes de l'enseignant

Vous allez me résoudre ce problème.



Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

- En clarifiant le contrat didactique
 - Des malentendus relatifs à l'omniscience de l'enseignant



- D'où la nécessité de faire une place aux « problèmes pour chercher » dont la réponse n'est *a priori* pas connue de l'enseignant.

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

Des problèmes pour chercher

Le jeu du MORPION additif CE1

Dans ce jeu, on propose une grille qui contient des nombres de 1 à 9.
Il s'agit, comme au morpion, d'aligner quatre nombres dont la somme est 15, horizontalement, verticalement ou en diagonale.

3	5	1	9	2	3
8	3	1	7	6	2
6	2	2	5	1	4
3	5	1	4	9	2
5	9	3	3	1	5
1	3	7	1	4	8

Le but du jeu est de repérer le plus possible de combinaisons dans la grille.

Combien de combinaisons as-tu trouvé ?

Compétence travaillée : Calculer mentalement des sommes et des différences

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

57

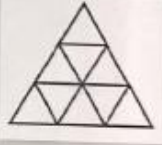
Des problèmes pour chercher

Challenge mathématique CP - manche 2



1. Mes recherches

Problème 5 : LES TRIANGLES



Combien y a-t-il de triangles ?



N'oubliez pas de répondre en faisant une phrase.

Ma réponse : Il y a 13 triangles.

Ma réponse : Il y a 13 triangles.

Classe de H.Grosz, CP

Lydia Bao novembre 2015

Source : <http://www.circ-ien-wittelsheim.ac-strasbourg.fr/wp-content/uploads/2015/09/Apprendre-%C3%A0-chercher-par-l%E2%80%99interm%C3%A9diaire-du-Challenge-Math%C3%A9matique.pdf>

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

58

- En prenant appui sur des référents méthodologiques
 - Identification de la situation mathématique
 - ✦ domaine additif-soustractif ou multiplicatif/de partage
 - ✦ données connues (je connais / je cherche) : exemple des drapeaux
 - ✦ recours au schéma codifiant la situation mathématique : schématisation de type Vergnaud / axe chronologique
 - Recours à des codifications

Donner des références de raisonnement (cf. typologie des problèmes additifs; multiplicatifs) **et non pas des modes opératoires**

Mettre en relation les énoncés travaillés avec ceux de problèmes rencontrés antérieurement permet de conduire les élèves à identifier progressivement des catégories de problèmes.

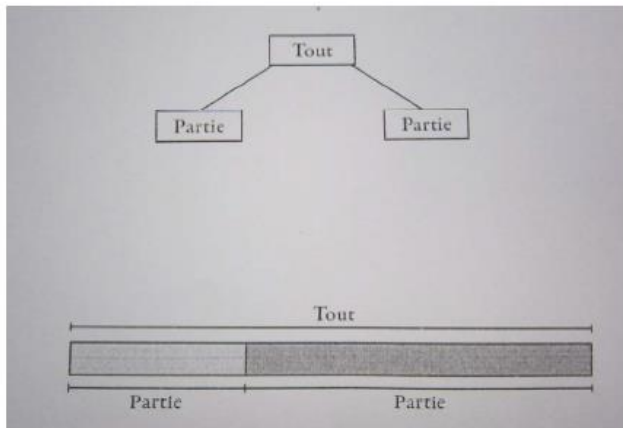
7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

59

- En prenant appui sur des référents méthodologiques
 - Identification de la situation mathématique

Composition d'état



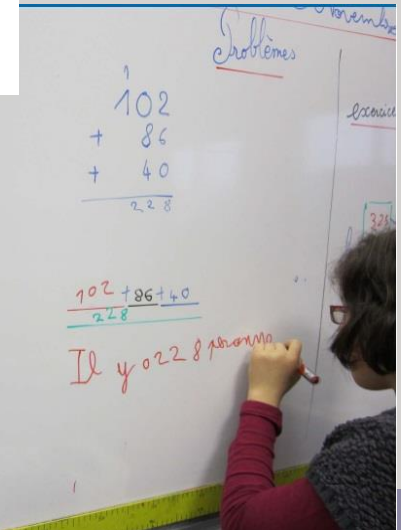
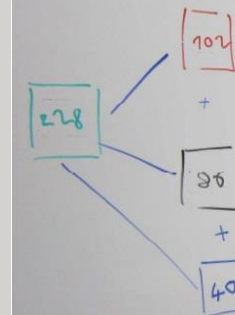
« 102 jeunes garçons, 86 jeunes filles et 40 adultes se trouvaient à un concert.

Combien y avait-il de personnes au concert ? »

Dans le schémas on fait apparaître les « parties » et le « tout », avec des cases ou des barres.

Dans ce problème on connaît les 3 « parties ».
Pour trouver le « tout » on fait une **addition**.

http://www.ia56.ac-rennes.fr/jahia/webdav/site/ia29/users/dle-mentec/public/documents_a_telecharger/Supports-de-formation/Resolution%20de%20probl%C3%A8mes.pdf



Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

60

- En prenant appui sur des référents méthodologiques
 - Identification de la situation mathématique



Composition d'état

« Monsieur Enzo a fait cuire 285 pizzas. Il en a vendu beaucoup, mais il lui en reste 70.
Combien de pizzas a-t-il vendues ? »

On peut connaître le « tout » et une « partie » pour rechercher une autre partie.
 Dans ce cas on fait une **soustraction**.

The whiteboard contains a diagram and a subtraction problem. The diagram shows a box labeled '285' with 'le tout' written below it. Two lines branch out from this box to two other boxes: one labeled '70' with 'pizzas non-vendues' written next to it, and another labeled '215' with 'pizzas vendues' written next to it. Below the diagram is a subtraction problem:
$$\begin{array}{r} 285 \\ - 70 \\ \hline 215 \end{array}$$

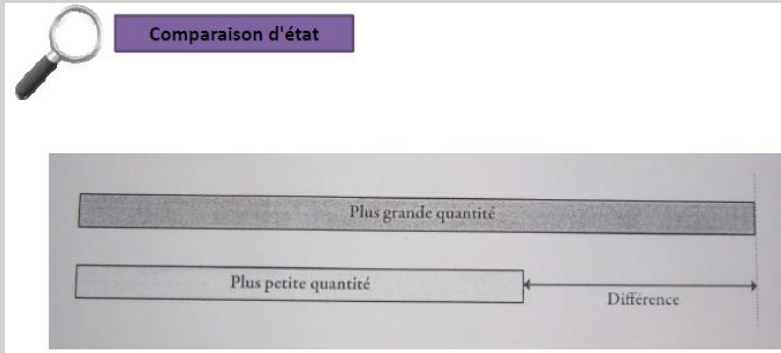
The bottom photograph shows a close-up of the whiteboard with the same diagram and subtraction problem. The subtraction problem is written in red ink. The result '215' is written in green ink. Below the subtraction problem, the text '215 pizzas sont vendues' is written in green ink.

http://www.ia56.ac-rennes.fr/jahia/webdav/site/ia29/users/dle-mentec/public/documents_a_telecharger/Supports-de-formation/Resolution%20de%20probl%C3%A8mes.pdf

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

61

- En prenant appui sur des référents méthodologiques
 - Identification de la situation mathématique



Comparison d'état

Lisa mesure 96 cm. Mathilde mesure 8 cm de moins que Lisa.

Combien Mathilde mesure-t-elle ?

- Schématisation à partir de barres pour les comparaisons.

Problèmes

exercice 1

Lisa mesure 96 cm. Mathilde mesure 8 cm de moins que Lisa.
Combien Mathilde mesure-t-elle ?

Lisa	96 cm	
Mathilde	?	8 cm

96	
- 8	
88	

Mathilde mesure 88 cm.

http://www.ia56.ac-rennes.fr/jahia/webdav/site/ia29/users/dle-mentec/public/documents_a_telecharger/Supports-de-formation/Resolution%20de%20probl%C3%A8mes.pdf

7

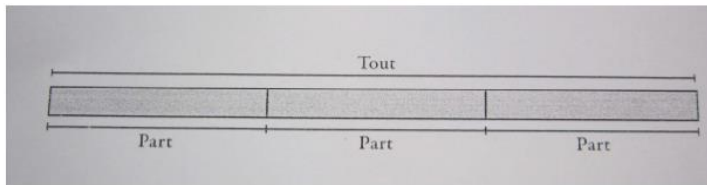
Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

62

- En prenant appui sur des référents méthodologiques
 - Identification de la situation mathématique



Composition d'états égaux



Composition d'états égaux

- Lorsque l'on connaît le nombre de « parties » et que ces « parties » sont égales on peut faire une **multiplication** pour trouver le « tout ».
- Lorsque l'on connaît le « tout » et le nombre de « parties » on fait une **division** pour trouver la valeur d'une « partie ».
- Lorsque l'on connaît le « tout » et la valeur d'une « partie », on fait une **division** pour trouver le nombre de « parties ».

« 5 enfants achètent un cadeau qui coûtent 30 euros. Ils partagent la somme à payer équitablement. **Combien chaque élève devra-t-il payer ?** »

- On connaît le « tout » et le nombre de « parties ». On cherche la valeur d'une « partie ». Les élèves doivent faire une division ou une multiplication à trou.

5 enfants achètent un cadeau qui coûte 30 euros. Ils partagent la somme à payer équitablement. Combien chaque élève devra-t-il payer ?

Je dessine ce que j'ai fait :

Je fais un schémas :

Calcul : $6 \times 5 = 30$ $30 : 5 = 6$

Phrase-réponse : Chaque enfant devra 6€

http://www.ia56.ac-rennes.fr/jahia/webdav/site/ia29/users/dle-mentec/public/documents_a_telecharger/Supports-de-formation/Resolution%20de%20probl%C3%A8mes.pdf

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

63

- En prenant appui sur des référents méthodologiques
 - Aides métacognitives

Définition du but à atteindre

L'anticipation collective du résultat précède la recherche de la solution

Raisonnement à haute voix

Verbalisation en groupe des stratégies individuelles

Réexamen collectif du cheminement

Retour réflexif à caractère métacognitif

7

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

64

- En suscitant la recherche d'analogies centrées sur la structure des énoncés

Présentation de problèmes isomorphes

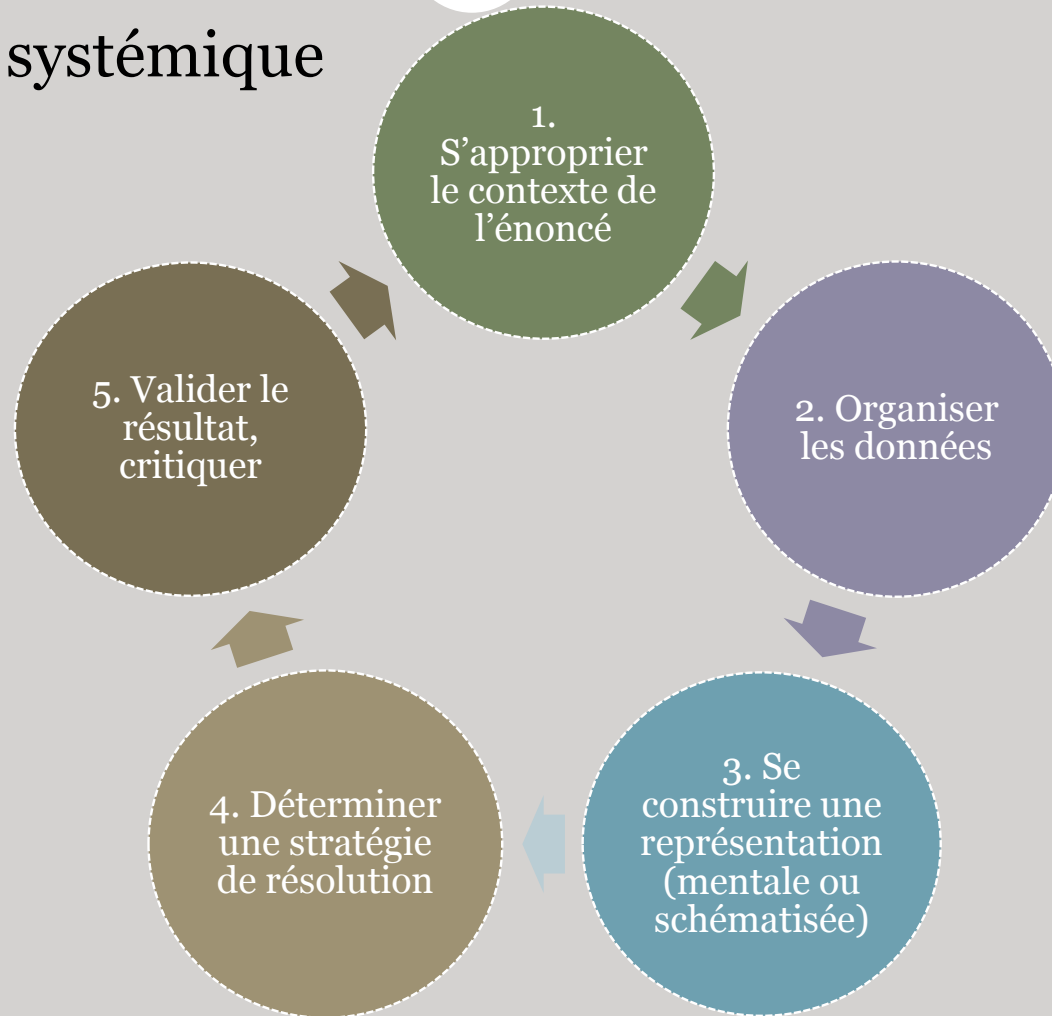
Identification des analogies

Réalisation d'un référent (affichage) centré sur les *analogies de structure*, et non sur l'apparence

Focaliser l'attention des élèves sur la démarche de résolution

65

Une approche systémique



En guise de conclusion

66

- Un dispositif local: le challenge mathématique
- En mathématiques plus qu'ailleurs, quand on perd le fil de la compréhension, on perd la capacité à continuer à apprendre. A l'égard des élèves en difficulté, il y a donc une erreur pédagogique majeure: celle qui consiste à penser qu'il faudrait se limiter pour eux à l'apprentissage des mécanismes, et que l'abord des stratégies pourrait être laissé de côté. (D'après Roland Charnay)

Biblio-sitographie

67

- **REFERENTS INSTITUTIONNELS**

- Programmes de l'école élémentaire
 - <http://www.circ-ien-illfurth.ac-strasbourg.fr/wp-content/uploads/2012/01/2015-Programmes-cycles-2-3-4.pdf>
- MEN, *Document d'accompagnement Le nombre au cycle 2*, Canopé, 2012
 - http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf
- Conférence de consensus CNESEO
 - <http://www.cnesco.fr/fr/conference-de-consensus-numeration/>

- **SITOGRAFIE ET RESSOURCES**

- Le challenge mathématique
 - <http://www.circ-ien-wittelsheim.ac-strasbourg.fr/?cat=43>
- Une banque de problèmes catégorisés selon la typologie de Vergnaud (cycles 2 et 3)
 - http://mathematiques21.ac-dijon.fr/IMG/pdf/Synthese_docs_problemes.pdf
- La page du site de Dominique Pernoud (PIUFM) consacrée à la résolution de problèmes
 - <http://pernoux.pagesperso-orange.fr/problemes.htm>